

**Задължителни задачи по математика за учениците от 9. Б клас
за лятна работа и подготовка за входното ниво за 10. клас.**

Алгебра

зад 1. Решете уравнението:

$$\frac{2x}{3-x} = \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{4}{x^2-2x-3} - \frac{x-2}{3-x}$$

$$\frac{x-2}{2x} + \frac{x}{x+1} = 0$$

$$\frac{9}{x^2-11x+28} = \frac{2}{x-7} + \frac{x-1}{4-x}$$

$$\sqrt{2x-1} = x-2$$

$$\sqrt{5x-6} = x$$

$$\sqrt{x-9} = \sqrt{1-x}$$

$$\sqrt{-x+2} = x$$

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-5} = 3$$

$$2\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2} = 2$$

$$\sqrt{2x+5} - \sqrt{5x-1} + 2 = 0$$

$$2\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} = 11$$

$$2x^6 - 13x^5 + 16x^4 + 34x^3 - 42x^2 - 45x = 0$$

$$x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2 = 0$$

$$6x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 15x = 3$$

$$10x^3 + 5x^2 - 2x = 1$$

$$|3x-1|-2=x$$

$$|x^2-x|-12=0$$

$$|3x-1|-2=x^2-x$$

$$|2x-3|-x^2=5-4x$$

$$(x^2-3x+4)^2-16=10x(x-3)$$

$$x^4-3x^2-4=0$$

$$(x^2+3x+3)^2-13x(x+3)=9$$

$$x^2(3x-2)^2+18x^2-12x=7$$

$$x^4-4x^2+3=0$$

$$\frac{21}{x^2-4x+10}+4x=6+x^2$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1}+1\right)^2-9\left(\frac{x^2}{x-1}+1\right)=10.$$

зад 2. Опростете дробта

a.
$$\frac{3x-x^2}{3x^2-10x+3}$$

b.
$$\frac{6x-3x^2}{2x^2-5x+2}$$

c.
$$\frac{9-x^2}{3x^2+10x+3}$$

зад 3. Определете стойностите на реалния параметър m , за които уравнението

$$mx^2-(2m-3)x+m+7=0$$
 има два различни реални корена.

зад 4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$(3-x)(x+1)=a$$
 има два различни положителни корена.

зад 5. Определете стойностите на реалния параметър m , за които уравнението

$$(m-3)x^2-(2m-3)x+m+1=0$$
 има единствено решение.

зад 6. Определете знаците на корените на уравнението $4x^2-28x+29=0$ без да го решавате.

зад 7. Определете знаците на корените на уравнението $7x^2+104x+23=0$ без да го решавате.

зад 8. Определете знаците на корените на уравнението $13x^2+2x-80=0$ без да го решавате.

зад 9. Определете знаците на корените на уравнението $-3x^2-140x+48=0$ без да го решавате.

зад 10. Съставете квадратно уравнение, корените на което са два пъти по-големи от корените на уравнението $3x^2-10x+2=0$.

зад 11. Съставете квадратно уравнение, корените на което са с 2 по-малки от корените на уравнението $3x^2 - 10x + 2 = 0$.

зад 12. Съставете квадратно уравнение, корените на което са два пъти по-малки от корените на уравнението $3x^2 - 10x + 2 = 0$.

зад 13. Съставете квадратно уравнение, корените на което са с 2 по-големи от корените на уравнението $3x^2 - 10x + 2 = 0$.

зад 14. Представете изразите във вид на рационална дроб.

А) $\frac{(x-1)^3}{x^2-x} : \frac{x-1}{x}$

Б) $\frac{4+x^2}{x^2-4} - \frac{x}{x+2}$

зад 15. Опростете израза $(a - \frac{1}{a+1}) : \frac{a^2+a-1}{3-a} + \frac{1}{1+a}$

зад 16. Докажете тъждеството $\frac{1+x}{x^2-2x} - \frac{x+3}{4-x^2} - \frac{2}{x+2} = \frac{10x+2}{x^3-4x}$

зад 17. Даден е полинома $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24$

А) Пресметнете $f(-3)$

Б) Решете уравнението $f(x)=0$

зад 18. Решете системата:

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + y^2 = 2 + y \\ x^2 = 2xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x + 2y + 2 = 0 \\ x^2 + 2xy = 3y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 + y - x = 4 \\ 2x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x + 2y + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + yx + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 \\ 2xy + x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^3 + 2y^3 = 18 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x + xy + y = 11 \end{cases}$$

зад 19. Намерете стойността на израза за съответното уравнение:

a. $2x^2 - 15x + 1 = 0$ $2x_1 + 8x_1x_2 + 2x_2$

b. $3x^2 - x - 1 = 0$ $\frac{2x_1}{x_2} + \frac{2x_2}{x_1}$

c. $4x^2 - x - 2 = 0$ $x_1^3 + x_2^3$

d. $x^2 + x - 7 = 0$ $x_1^4 + x_2^4$

e. $3x^2 - 9x + 1 = 0$ $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3$

f. $x^2 - 13x + 10 = 0$ $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$

g. $5x^2 - 13x + 1 = 0$ $\frac{5}{x_2} + \frac{5}{x_1}$

h. $x^2 - x - 3 = 0$ $|x_1 - x_2|$

i. $2x^2 - x - 4 = 0 \quad |x_1^2 - x_2^2|$

зад 20. Намерете дефиниционното множество на израза

a. $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

b. $\frac{x}{1-x} : \frac{10-5x}{1+x}$

c. $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} : \frac{x-6}{5x}$

зад 21. Пресметнете стойността на израза

a. $\sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{6}^2}$

b. $\sqrt{50} - 5\sqrt{2} + 3$

c. $\frac{12}{1+\sqrt{3}} : \frac{8}{\sqrt{3}+1}$

d. $\sqrt{\sqrt{7}^2 + \sqrt{2}^2} - \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{6}^2}$

e. $\frac{12}{\sqrt{3}} - 4(\sqrt{3} - 1)$

f. $\frac{\sqrt{(-2)^2 + \sqrt{5}^2}}{5\sqrt{2} - 3 - \sqrt{50}}$

g. $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 - 9 - \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{6})^2}$

Геометрия

зад 1. В окръжност са построени хордите AC и BD, които се пресичат в точка M. Отсечката AM е с дължина 8 cm, а CM е по-малка със 7 cm от BM и е с 3 cm по-голяма от DM. Намерете дължината на AC.

зад 2. От точка M външна за окръжност са построени допирателната MC и секущата MBA. Отсечката CM е с дължина 6 cm, а BM е с 1 cm по-къса от AB. Намерете дължината на AM.

зад 3. Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност и диагоналите му се пресичат в точка O. Ако $BD=7$ cm, $BO=4$ cm и AO е с 4 cm по-голяма от OC, намерете дължината на AC.

зад 4. Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност. Правите AB и CD се пресичат в точка M. Намерете дължината на MD, ако $CD=9$ cm, $MA=10$ cm и $AB=3$ cm.

зад 5. От точка P външна за окръжност са построени секуща PAB и допирателна PT. Известно е, че $AB=7$ cm и AP е с 3 cm по-къса от PT. Намерете дължината на PT.

- зад 6. Намерете страните на успоредник с периметър 45 cm , ако височините му са съответно 7 cm и 2 cm .
- зад 7. Диагоналът AC на трапеца $ABCD$ дели диагонала BD на отсечки чието отношение е $0,8$.
Намерете средната основа на трапеца, ако AB е с дължина 80 cm .
- зад 8. В триъгълник ABC е вписан ромб $AMPK$ ($M \in AB$, $P \in BC$, $K \in AC$). Известно е, че $AB=12 \text{ cm}$ и $AC=6 \text{ cm}$. Намерете страната на ромба.
- зад 9. Страните на $\triangle ABC$ са $BC=9 \text{ cm}$, $AC=18 \text{ cm}$ и $AB=12 \text{ cm}$. Върху страната AC е избрана точка M такава, че $\angle ABC = \angle AMB$. Намерете периметъра на $\triangle ABM$.
- зад 10. Страните на триъгълник са 26 cm , 28 cm и 30 cm . Права, която е успоредна на най-малката страна, разделя триъгълника на фигури с равни периметри. Намерете тези периметри.
- зад 11. В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата AK ($K \in BC$). През точка K е построена права успоредна на AB , която пресича AC в точка E . Намерете дължината на AB , ако $AE=12 \text{ cm}$ и $EC=8 \text{ cm}$.
- зад 12. Централата на две външнодопиращи се окръжности е 30 cm . През допирната им точка е построена секуща. Ако получените хорди са с дължини 6 cm и 9 cm , намерете радиусите на двете окръжности.
- зад 13. В равнобедрен триъгълник с бедро 5 cm и основа 6 cm е вписана окръжност. Намерете:
- Отсечката съединяваща допирните точки на окръжността с бедрата;
 - Дължината на допиратекната към окръжността, която е успоредна на основата;
 - Дължината на отсечката, която е успоредна на основата и минава през центъра на окръжността.
- зад 14. Диагоналите на трапеца $ABCD$ се пресичат в точка O . Около триъгълниците ABO и CDO са описани окръжности, чиито радиуси са в отношение $0,6$. Намерете основите на трапеца, ако средната му отсечка е 64 cm .
- зад 15. Намерете страните и лицето на правоъгълен триъгълник, ако хипотенузата е 14 cm , а проекциите на катетите се отнасят $3:4$.
- зад 16. Намерете периметъра и лицето на правоъгълен триъгълник, ако проекциите на катетите са в отношение $144:25$, а височината към хипотенузата е 60 cm .
- зад 17. Намерете периметъра и лицето на правоъгълен триъгълник, ако проекциите на катетите му са 144 cm и 25 cm .
- зад 18. Намерете медианите на правоъгълен триъгълник, ако хипотенузата му е по-голяма от катетите с по 8 cm и 9 cm .
- зад 19. Периметърът на правоъгълен триъгълник е 40 cm , а хипотенузата му е с 2 cm по-голяма от единия катет. Намерете лицето на триъгълника и синусът на по-малкия му остър ъгъл.
- зад 20. Намерете ъглополовящата на правия ъгъл в правоъгълен триъгълник с катети $\sqrt{2} \text{ cm}$ и $3\sqrt{2} \text{ cm}$.

- зад 21. Медианата към хипотенузата на правоъгълен триъгълник е със 7 cm по-голяма от височината към хипотенузата. Периметърът е 72 cm . Намерете хипотенузата и лицето.
- зад 22. В правоъгълен триъгълник с периметър 36 cm е вписана окръжност. Допирната ѝ точка с хипотенузата я дели на отсечки, чиито дължини са в отношение $1,5$. Намерете страните на триъгълника.
- зад 23. Намерете медианите на правоъгълен триъгълник с катети 20 cm и 21 cm .
- зад 24. Намерете страните на правоъгълник с лице 48 cm^2 и диагонал 10 cm .
- зад 25. Намерете диагонала на правоъгълник с лице 60 cm^2 и периметър 34 cm .
- зад 26. Намерете страните на правоъгълник, на който диагонала е с 1 cm по-голям от едната страна на правоъгълника и с 8 cm по-голям от другата.
- зад 27. Периметърът на правоъгълник е 28 cm , а една от страните му е с 2 cm по-къса от другата. Намерете лицето на правоъгълника и радиуса на описаната му окръжност.
- зад 28. Отношението на страните на правоъгълник е 3 , а диагонала е $\sqrt{10}\text{ cm}$. Намерете периметъра и лицето.
- зад 29. Намерете страните на правоъгълник вписан в окръжност с диаметър 10 cm , ако разликата им е 2 cm .
- зад 30. Намерете лицето на квадрат с диагонал $7\sqrt{2}\text{ cm}$.
- зад 31. Намерете радиуса на описаната окръжност около квадрат с периметър $8\sqrt{2}\text{ cm}$.
- зад 32. Намерете лицето на равнобедрен триъгълник с периметър 98 cm и бедро 25 cm .
- зад 33. Даден е равнобедрен триъгълник с основа 14 cm и лице 168 cm^2 . Намерете височината към бедрото и стойностите на тригонометричните функции на ъгъла между бедрата.
- зад 34. Тангенсът на ъгъла при основата на равнобедрен триъгълник е $0,75$, а бедрото е 20 cm . Намерете периметъра и лицето.
- зад 35. Намерете стойностите на тригонометричните функции на ъгъла при основата на равнобедрен триъгълник с основа 6 cm и периметър 16 cm .
- зад 36. В окръжност с диаметър 50 cm е построена хорда с дължина 48 cm . Намерете разстоянието от центъра на окръжността до тази хорда.
- зад 37. Намерете дължината на хорда намираща се на разстояние 21 cm от центъра на окръжност с диаметър 58 cm .
- зад 38. Намерете дължината на окръжност, ако центърът ѝ е на разстояние 6 cm от хорда с дължина 16 cm .
- зад 39. В окръжност с диаметър 50 cm са построени две успоредни хорди с дължини 40 cm и 48 cm . Намерете разстоянието между тях.
- зад 40. Намерете лицето на равнобедрен трапец с бедро 25 cm , в който е вписана окръжност с диаметър 24 cm .

- зад 41. Намерете бедрото, диагонала и лицето на равнобедрен трапец, който е описан около окръжност и има основи 8 cm и 18 cm .
- зад 42. Даден е равнобедрен трапец с височина 12 cm , бедро 13 cm и диагонал 15 cm . Намерете лицето и радиуса на описаната окръжност.
- зад 43. Даден е равнобедрен трапец с малка основа 5 cm , бедро 6 cm и ъгъл при голямата основа 60° . Намерете лицето и диагонала на трапеца.
- зад 44. Ъглите при основата на трапец с лице $35\sqrt{3}\text{ cm}^2$ са по 60° , а разликата на основите е 10 cm . Намерете периметъра и радиуса на описаната окръжност.
- зад 45. Даден е равнобедрен трапец с бедро 6 cm и голяма основа 10 cm . Намерете лицето на трапеца, ако знаете, че диагоналът е перпендикулярен на бедрото.
- зад 46. Намерете периметъра на ромб с диагонали 12 cm и 16 cm .
- зад 47. Намерете лицето на равностранен триъгълник с периметър 15 cm .
- зад 48. Намерете радиуса на вписаната окръжност в ромб с диагонали 30 cm и 16 cm .
- зад 49. Страната на ромб е с 1 cm по-голяма от единия диагонал на ромба и с 13 cm по-малка от другия диагонал. Намерете страната на ромба.
- зад 50. В правоъгълен трапец с бедро 17 cm е вписана окръжност с диаметър 15 cm . Намерете страните.
- зад 51. В правоъгълен трапец с диагонали 13 cm и $2\sqrt{85}\text{ cm}$ по-малкото бедро е 12 cm . Намерете основите и лицето.
- зад 52. Намерете общата външна допирателна две допиращи се окръжности с радиуси 9 cm и 4 cm .